

# 实验 $2 \times 2$ 博弈中的运动结构

## Dynamical Pattern in a $2 \times 2$ Game with Human Subjects

Bin Xu (许彬)<sup>a</sup>, Zhijian Wang (王志坚)<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Experimental Social Science Laboratory, Zhejiang University, Hangzhou, 310058, China

### Abstract

In the two-dimensions' strategy space of a two-populations society, social should be jumping or stop at each moment. From a  $2 \times 2$  game of experimental economics laboratory data, we measure the mean velocity of the jumping at each point of the strategy space. We find that the velocity vector field is in a cycle pattern, at the same time, unbalance (beyond detailed balance condition) jumping's distribution is in a ring-mountain form.

**Keywords:** experimental economics, time reversal, velocity field, stationary non-equilibrium state, mixed strategy Nash Equilibrium, evolutionary game theory, matching pennies game, detailed balance condition, time reversal antisymmetry, Markov processes, Edgeworth cycle, Shapley polygon

### 1. Introduction

【简介】两类人群相互作用使社会状态在二维策略平面上随时间产生跳跃。在一个 $2 \times 2$ 的实验经济学博弈中，我们测量了社会的跳跃速度。每种状态上社会跳跃的平均速度在二维策略平面上形成了惊人的旋转模式，同时，非平衡跳跃的分布形成了环形山的形状。

### 2. Experiment

【实验】我们实施的是一个 $2 \times 2$ 的常和博弈实验，其支付矩阵是 $[(5, 0)(0, 5); (0, 5)(5, 0)]$ (见表1)。每一场实验由4名“上下(Up-Down)”玩家（第一种角色）和4名“左右(Left-Right)”玩家（第二种角色）组成，在300轮的实验中，这些玩家的角色固定，但每轮随机配对匿名相互作用。12场实验于2010年10月24日和25日在浙江大学实验社会科学实验室进行。（实验程序和介绍详见附录一）

### 3. Measurement and Results

【测量与结果】我们用 $i$ 表示Up-Down人群在博弈的一轮中选择Up的比率，由于人数是4人，因

Table 1: 【表1】 $2 \times 2$ 博弈的支付矩阵

	$L$	$R$
$U$	5, 0	0, 5
$D$	0, 5	5, 0

此，其值域为 $(0, 0.25, 0.5, 0.75, 1)$ ，同时，我们用 $\vec{e}_1$ 表示该人群在其策略空间上的单位矢量；同样， $j$ 表示Left-Right人群一轮中选择Left的比率，而 $\vec{e}_2$ 是其单位向量。社会在策略选择上的状态可以用 $i\vec{e}_1 + j\vec{e}_2$ 或 $(i, j)$ 表示。本博弈的纳什均衡为 $(0.5, 0.5)$ ，实验的均值为 $(0.5115, 0.4916)$ 。本实验中所有可能出现的状态可以在一个二维策略平面上用 $5 \times 5$ 点阵来表示。本文报告该点阵上每一格点的社会跳跃表现。

从 $t$ 轮的 $(i, j)$ 状态到 $t+1$ 轮的 $(i', j')$ 状态的转移，可以描述为 $\vec{J}_{(i,j) \rightarrow (i',j')} = (i' - i)\vec{e}_1 + (j' - j)\vec{e}_2$ ，我们称之为马尔可夫跳跃。每一场实验，我们得到299个社会跳跃观察值，12场实验，共获得3588个观察值，我们用马尔可夫跳跃矩阵 $A_{(i,j) \rightarrow (i',j')}$ 来记录这些跳跃（附录提供了完整的马尔可夫矩阵）。每一个给定格点 $(i, j)$ 上社会马尔可夫跳跃的平均速度，可以按照以下公式进行具体测量：

$$\vec{v}_{(i,j)} = \frac{\sum_{(i',j')} (A_{(i,j) \rightarrow (i',j')} \vec{J}_{(i,j) \rightarrow (i',j')} + A_{(i',j') \rightarrow (i,j)} \vec{J}_{(i',j') \rightarrow (i,j)})}{\sum_{(i',j')} A_{(i,j) \rightarrow (i',j')} + \sum_{(i',j')} A_{(i',j') \rightarrow (i,j)}} \quad (1)$$

式中， $(i, j)$ 代表马尔可夫跳跃矩阵的行指标， $(i', j')$ 为列指标，分子表示的是所有跳出与跳

\*Corresponding author. Tel: +86 571 88981199; Fax: +86 571 88981199; Add: Dong San 106, Zijingang Campus, Zhejiang University, Hangzhou, China, 310058.

Email address: wangzj@zju.edu.cn (Zhijian Wang ())

入的矢量和，分母是在格点 $(i, j)$ 观察到的跳出和跳入的频次总和。图一(a)绘出了所有格点的平均速度 $\vec{v}(i, j)$ 。其速度的大小与到中心位置的距离成比例关系，线性回归结果显示，系数为0.2714( $p = 0.000, S.E. = 0.0013$ )。并且，任意一个格点上的速度矢量与方位矢量正交（夹角为 $90.5 \pm 1.9^\circ$ ），这意味着在这个特定的两人群冲突博弈中，平均来看，社会以每轮0.2714的角速度顺时针匀速转动。

图一(b)绘出了每个格点 $(i, j)$ 上非平衡跳跃频次 $f(i, j)$ 的分布，非平衡跳跃是指去除了任意两个格点之间方向相反的成对跳跃以后的跳跃，即去除了满足细致平衡条件的跳跃以后的跳跃。其中， $f(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{(i', j')} |A_{(i', j') \rightarrow (i, j)} - A_{(i, j) \rightarrow (i', j')}|$ ，为格点 $(i, j)$ 上的所有非平衡跳跃的总频次。在我们的数据中，非平衡跳跃占总跳跃频次的比率为0.326(1170/3588)。频次的多少在图中显示为该格点上的半径，观察表明，围绕中心点(0.5, 0.5)的临近的8个格点的非平衡跳跃频次分布显示出环形山的特征。

#### 4. Discussion and Conclusion

【讨论】本文采用的测量方法，也就是去除彼此抵消的部分，只选择“净”动态发生量的做法，就其思路来看，与Young的细致均衡的思路相似Young (2008)，与物理学中非平衡稳态的时间反演对称性的思路相似Baiesi et al. (2009)，也与化学反应过程中的反应平衡过程中时间反演可逆与不可逆过程的分离方法相似Prigogine (1978)。较为严格的任意两态之间的跃迁的统计结果检验显示，该系统有时间反演对称性破缺的现象(见附录三)。就数学描述方法而言，采用马尔科夫矩阵方法来汇总描述时刻 $t$ 到 $t+1$ 的过程，这种方法在实验经济学中也曾采用，如Cason et al. (2005)，Battaglini & Palfrey (2007)和Buchheit & Feltovich (2010)。关于速度的概念，我们的考虑与演化博弈理论相似Schuster & Sigmund (1981)。图1的结果，直接与按照表1支付矩阵在策略空间上展开的支付矢量(payoff vector)相似Hofbauer & Sandholm (2009)，见附录图6。这暗示着，社会运动与支付函数之间的关系是简单的。本文以尽量简洁的方式描述了这个实验室中的社会运动的现象。进一步的研究可能可以进一步增进知识。这可以从以下几种方面考虑。

从物理学的角度，文中的两个测量公式，细心的读者可以发现，我们采用的是将系统过程按照时间反演对称性分解为对称和反对称两部分的方法。这可能和物理学中统计力学中稳态的涨落-耗散关系相连接。研究表明Bertini et al. (2001)，稳态系统中的系统响应过程取决于时间反演反对称的过程。本文的发现可能是支持近年要求对Onsager倒易关系Onsager & Machlup (1953)的改进Bertini et al.

(2001)的证据。作为态间发射和吸收的不对称，这是系统超越细致均衡的直接证据。不考虑文中的Markov跳跃的矢量假设，也就是 $\vec{J}_{(i, j) \rightarrow (i', j')}$ 是矢量的假设，直接通过态间的跃迁的对称性的测量，我们可以同样得到动态结构。所谓态之间跃迁的对称性的测量，就是测量态之间的跃迁的频次是否相等。如果在统计上二态之间发射和吸收的频次的差值在不同的实验节次中稳定地偏离于0，那么我们说，这二个态之间的过程，在统计上，不是时间反演对称的。（对比附录三图Figure7和Figure8）。类似于速度的测量，有兴趣的读者可以通过附录二计算出其他的运动量，进而与文献如Hofbauer (1996)和Sato et al. (2002)等进行比较。

在演化理论上，核心问题之一是演化动力学方程。演化动力学方程有很多(Hofbauer & Sigmund (2003))，但均缺乏足够的实验支持，尤其是实验经济学的实验方法的支持。先前的实验经济学的方法试图将实验数据与演化方程联系起来，但是，只得到过模糊的、趋势性的图象，其中有代表性的，如Van Huyck (2008)和Bouchez & Friedman (2008)。通过我们的速度场的方法，可以在各个格点上计算测量值，对理论的验证可以在空间的各个格点上进行，不但可以比较大小，而且能够比较方向。我们的实验，与Selten & Chmura (2008)的结果一起，可以是检验一系列演化动力学方程的依据。一个具体的例子是，不同的演化方程在空间点上的演化速度大小和方向是不一样的，比如在Schuster & Sigmund (1981)中，在策略空间四个顶点的演化速度为0，而图1显示的结果显然不是，这是有趣的。同样有趣的是，如同Gaunersdorfer & Hofbauer (1995)指出的一样，Shapley (1964)分析的类似我们这个实验参数的系统中将永无休止的循环(never-ending cycle)，将出现四边形，但是，近60年的实验经济历史学上，这个四边形，就我们所知，在我们以前，没有人如此清晰地观察到过。

回到社会科学实验中的经济学和政治学的例子。我们以两个例子和一个比较来讨论我们的发现和方法。（一）两个价格波动例子。以价格运动为例，价格会收敛到均衡价格，这是公共的智慧，但是在均衡点附近价格会呈现怎样的运动规律，却并不清楚。超过公共智慧，有经济学家猜想Edgeworth (1925)Shapley (1964)，价格波动在均衡价格附近是有规律的。直到最近二三十年，经过测量理论Maskin & Tirlé (1988)的改进，石油市场实证Noel (2007)的支持，同时早期的实验Kruse et al. (1994)和近期的实验测量方法的改进Cason et al. (2005)，这个长期模糊的图象开始变得清晰起来Benaïm et al. (2009)。我们的时间反演对

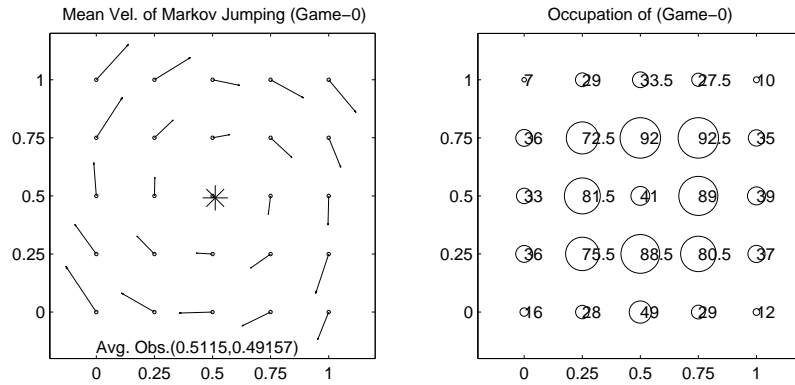


Figure 1: 【图一】马尔可夫跳跃速度和非平衡跳跃频次:(a)每一个给定的格点上的 社会跳跃的平均速度场, 小圆圈表示社会状态, 箭头表示格点上的社会跳跃的平均速度的大小与方向, 比例为1:1; \* 号表示测量到的均值位置。(b)每一个给定的格点上的非平衡跳跃的频次图。 可对比的12个真人实验Selten & Chmura (2008)的结果见附录 三中的图3和图4。

称性的考虑, 可以使得这个问题更加清晰, 附录三中利用我们的方法, 给出了两个实验Cason et al. (2005)和Buchheit & Feltovich (2010)数据中的速度场(时间反演反对称方法)的结果。(二)一个方法上的比较。利用我们的方法, 处理一个政治学实验的数据Battaglini & Palfrey (2007), 得到了更为清晰的结果。与他们文章中不去除彼此抵消过程的方法相比, 我们的方法可以容易地在矩阵中判断出收敛态, 进而可以清晰地得到不同制度对分配公平的判断依据(见附录三)。

作为实验方法, 人群实验的方法是一种具有完全过程记录的方法, 这样, 实验过程数据是“实验室中的社会”的“社会计算”的结果。我们的报告可能提供这样的一个证据, 基于实验经济学的实验社会科学方法, 对于经济学, 甚至是自然科学的深入研究是有帮助的。附录四提供了我们的实验数据结构以及实验数据记录的全集。

我们的工作以下两个方面是有用的。(1)在教学上, 这个发现和方法可以是简单的高等数学中的矩阵、微分方程, 矢量分析的习题, 也可以是高级数学的习题, 如群论和微分几何。通过这些方法和进一步的实验, 可能有助于社会科学成为一门硬科学。(2)在科学研究上, 它是基于实验的, 因而可能是把经济学, 演化理论, 甚至是物理学联系起来的一个连接点。

【总结】我们的实验数据提供的证据显示, 混合均衡附近的运动不是白噪声, 而是存在着精细的动态结构。受益于Selten & Chmaru包含12种博弈的实验数据Selten & Chmura (2008), 我们在其中发现了动态结构(见附录三)Xu & Wang (2010), 进而, 我们设计并实施了这个简单的两人群冲突博弈实

验。利用这一实验, 我们报告, 在个体对自身利益的追逐中, 社会整体表现出高度规律性的运动。

## 5. Appendix

### 【附录】

附录一: 实验程序和介绍

附录二: 马尔可夫跳跃矩阵

附录三: 动态结构的支持实验证据

附录四: 实验数据和数据结构说明

### 5.1. Appendix A

附录一: 实验程序和介绍

#### 实验介绍

您现在正在参加的是一个经济学实验。您将依您及他人在实验中的决定而赚得相当数量的金钱。因此, 认真地阅读这些介绍非常重要。我们派发给您的介绍只供您一人使用。实验期间不允许交流。如果您有任何疑问, 请举手。实验中, 我们使用的是虚拟币(分), 而不是人民币。在实验中, 您所有的收益都以虚拟币计算。在实验的最后, 您所赚得的虚拟币将会兑换成人民币。兑换比例为: 10分虚拟币=0.7元人民币在实验的最后, 您将得到: 您从实验中获得的所有收益(以人民币计价)加上5元人民币的参与费。收益会以现金形式支付给您。

下面是实验过程的描述

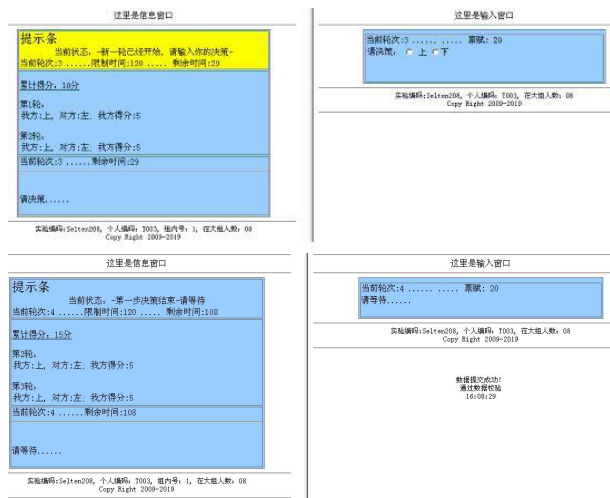


Figure 2: 实验界面图(1)输入界面; (2)响应界面

## 实验过程

实验按轮次进行，共300轮。参加实验的人将分为两类：角色”上下”和角色”左右”，每一轮，都是一个角色”上下”与一个角色”左右”配对游戏。角色”上下”的选择有2个，”上”(U)或者”下”(D)，而角色”左右”的选择也有2个，”左”(L)或者”右”(R)。一轮游戏结束，不同角色将按照以下支付矩阵获得收益：

每个格子的左上角的数字为角色”上下”的收益，右下角的数字为角色”左右”的收益，即：

角色”上下”选择”上”，角色”左右”选择”左”，则角色”上下”收益为5，角色”左右”收益为0；

角色”上下”选择”上”，角色”左右”选择”右”，则角色”上下”收益为0，角色”左右”收益为5；

角色”上下”选择”下”，角色”左右”选择”左”，则角色”上下”收益为0，角色”左右”收益为5；

角色”上下”选择”下”，角色”左右”选择”右”，则角色”上下”收益为5，角色”左右”收益为0；

角色在实验开始时随机确定，并在整个实验过程中保持不变，但每一轮的配对都重新进行，也就是说，我们的实验软件系统在每一轮都会在4个角色”上下”和4个角色”左右”中随机抽取一对组成一个游戏组。实验开始，您的电脑显示器上会出现如下信息及输入窗口：(见Figure2)

如果你是角色”左右”，则右边的”上”，”下”，就显示为”左”、”右”。窗口分为左右两部分，左边是信息窗口，右边是决策输入窗口。您可以看到提示的轮次、当前决策限制时间和剩余时间的信息。您必须在规定时间内完成投入决定。为了保证大家的进度，请勿拖延。同时，我们利用色彩变化作为提醒，当每一次决策开始时，信息窗口中的剩余时间提示条就会变成绿色，如果您在规定的时间过半时还没有完成决策，提示条就会变成黄色，如果规定时间结束，色彩就变为红色，此时，实验的状态监控员就会在门外大声提示”请出现红色提示窗口的同学抓紧时间”，而一旦您作出决策并处于等待他人完成决策的状态，窗口色彩是统一的蓝色。

如果您是角色”上下”，那么请在输入窗口中点击”上”(U)或者”下”(D)；如果您是角色”左右”，那么请在输入窗口中点击”左”(L)或者”右”(R)。在所有人都完成决策后，您将看到如下信息窗口(左)和输入窗口(右)：

信息窗口中显示了对方的选择和您的得分。请在记录表中记录您的得分。同时，提示条显示新一轮开始，您可以在右边的输入窗口作出新的选择。加总300轮的得分，得到您的实验总分。(信息窗口中的累计得分)

为了确保您了解了实验规则，下面进行实验前的相关规则测试。有问题请举手询问。

## 操作步骤

- 第一步：登录服务器
- 第二步：点击”实验程序”
- 第三步：输入实验编码、个人编码等信息
- 第四步：实验规则测试
- 第五步：实验，在电脑上选择并在个人记录纸上记录本人选择，对手选择和本人得分。
- 第六步：计算得分并按编号等候领取实验收益。

为了保护大家的隐私，领钱时请等待叫号，并在登记室外排队，每次一位按号进入。

## 基本情况

人数：12节×8人/节=96人，其中，男性47，女性49，参加者为公开招募的自愿参与实验的浙江大学学生。

人均收入：57.5元(含实验得分兑换收入和出场费5元)。

实验时间：实验在2010年10月24日和25日进行，共12个session，耗时90到120分钟。

实验地点：浙江大学紫金港校区东三312  
 实验室名称：浙江大学实验社会科学实验室  
 辅助人员：范良聪 吴舒洁 余杨伟 周鸿

## 5.2. Appendix B

附录二：马尔可夫跳跃矩阵

Table 2 说明：行指标( $i, j$ )表示社会在 $t$ 轮时的状态，共25个状态；列指标( $i', j'$ )表示社会在 $t + 1$ 轮时的状态。矩阵元表示从 $t$ 轮到 $t + 1$ 轮的马尔可夫跳跃频次的统计值。态指标 (0,1,2,3,4)分别表示(0, 0.25, 0.5, 0.75, 1)各态。

## 5.3. Appendix C

附录三：动态结构的支持实验证据

### SC实验的支付矩阵和动态结构

Selten 和 Chmura 设计的 $2 \times 2$ 实验支付矩阵是具有普遍性的Selten & Chmura (2008)。为方便读者比较12个实验的动态结构，我们将其矩阵列在Table 3.

Figure 3 和Figure 4是主文中Figure 1一样，依据主文中定义算法的的计算的结果。Figure 9是依据计算机生成的随机数产生每人每轮的策略，然后按照一样的 算法进行计算的结果。

Table 2: Payoff matrix of Selten and Chmura  $2 \times 2$  games

(1)	$L$	$R$	(7)	$L$	$R$
$U$	10, 8	0, 18	$U$	10, 12	4, 22
$D$	9, 9	10, 8	$D$	9, 9	14, 8
(2)	$L$	$R$	(8)	$L$	$R$
$U$	9, 4	0, 13	$U$	9, 7	3, 16
$D$	6, 7	8, 5	$D$	6, 7	11, 5
(3)	$L$	$R$	(9)	$L$	$R$
$U$	8, 6	0, 14	$U$	8, 9	3, 17
$D$	7, 7	10, 4	$D$	7, 7	13, 4
(4)	$L$	$R$	(10)	$L$	$R$
$U$	7, 4	0, 11	$U$	7, 6	2, 13
$D$	5, 6	9, 2	$D$	5, 6	11, 2
(5)	$L$	$R$	(11)	$L$	$R$
$U$	7, 2	0, 9	$U$	7, 4	2, 11
$D$	4, 5	8, 1	$D$	4, 5	10, 1
(6)	$L$	$R$	(12)	$L$	$R$
$U$	7, 1	1, 7	$U$	7, 3	3, 9
$D$	3, 5	8, 0	$D$	3, 5	10, 0

Table 3: Markov Jumping Matrix of the  $2 \times 2$  games with payoff matrix  $[(5, 0)(0, 5); (0, 5)(5, 0)]$

$t$	$t+1$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	3	4	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	0	0	2	4	1	2	4	0	2	0	0	1	2
1	0	0	1	0	2	5	3	10	5	1	0	5	4	5	4	5	1	0	1	0	0	1
2	0	1	3	2	0	4	12	14	4	0	3	17	10	2	1	2	7	0	0	0	0	0
3	0	1	3	2	1	2	8	14	6	0	1	7	2	5	1	3	2	1	0	2	0	0
4	0	0	2	3	0	1	2	3	4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	2	2	2	3	0	4	8	9	2	0	8	12	10	0	0	0	0
1	1	1	3	1	1	2	4	15	23	11	1	8	27	31	8	1	8	22	22	7	1	3
2	1	5	8	7	6	1	14	37	40	23	2	10	44	56	27	7	9	18	36	11	2	1
3	1	5	6	13	6	3	7	25	39	11	2	9	19	28	21	3	1	4	20	9	2	0
4	1	2	3	10	2	0	0	5	10	8	4	0	5	5	5	3	0	1	1	2	1	0
0	2	0	2	0	0	2	3	2	0	0	1	8	7	2	1	4	9	8	6	0	1	3
1	2	0	2	1	3	5	16	26	8	3	6	32	37	20	8	6	33	47	16	5	2	7
2	2	0	8	18	5	3	6	28	48	24	5	8	41	76	50	13	3	30	55	35	6	0
3	2	3	6	11	8	4	8	26	41	37	13	4	18	46	36	4	3	9	22	14	5	0
4	2	0	3	4	6	1	0	6	13	17	3	0	6	12	7	5	0	2	4	2	0	0
0	3	0	0	0	0	1	1	3	2	0	1	3	4	5	0	2	3	10	11	1	0	3
1	3	0	0	2	2	0	1	3	15	7	2	4	16	28	21	5	1	15	30	23	4	1
2	3	0	0	8	5	0	1	12	27	17	7	3	23	65	45	13	2	14	34	32	14	0
3	3	0	2	4	6	1	1	5	27	30	12	1	9	24	35	11	1	5	12	9	12	0
4	3	0	0	0	5	1	1	2	10	7	3	0	0	9	12	4	0	1	4	7	0	0
0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	4	0	0	0	2	0	0	0	1	3	2	1	0	5	9	0	0	2	6	5	0	3
2	4	0	0	1	0	0	0	4	4	6	4	0	3	17	4	5	1	4	8	14	2	1
3	4	0	1	0	0	1	0	1	6	7	2	0	2	6	10	5	0	3	3	3	4	0
4	4	0	0	0	1	0	0	0	3	2	2	0	1	2	0	1	0	0	2	2	1	0

说明：行指标  $(i, j)$  表示社会在  $t$  轮时的状态，共 25 个状态；列指标  $(i', j')$  表示社会在  $t+1$  轮时的状态。矩阵元表示从  $t$  轮到  $t+1$  轮的马尔可夫跳跃频次的统计值。态指标  $(0, 1, 2, 3, 4)$  分别表示  $(0, 0.25, 0.5, 0.75, 1)$  各态。



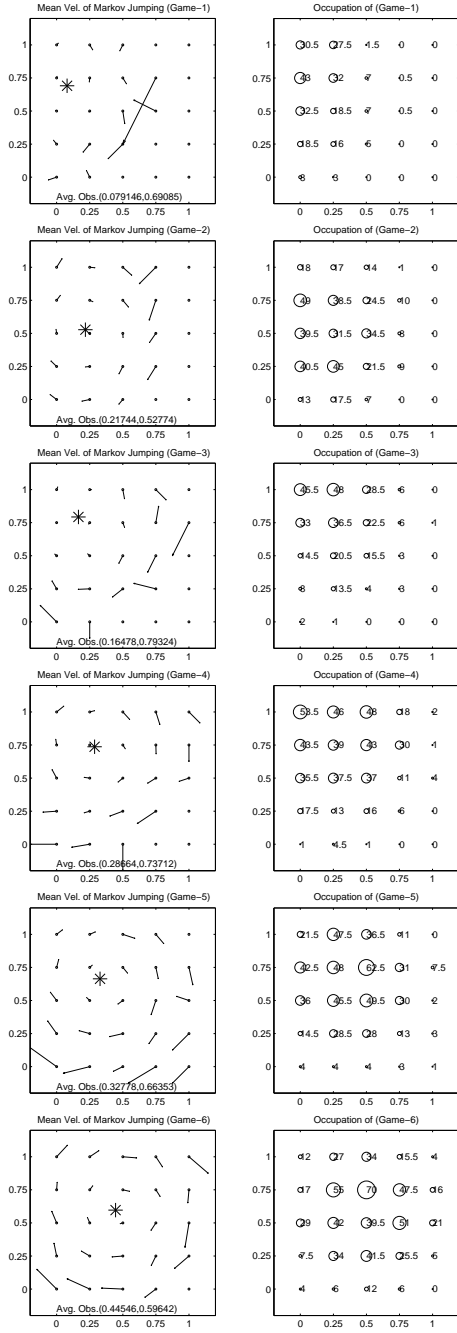


Figure 3: Velocity pattern in  $5 \times 5$  lattices for Game 1  $\rightarrow$  6 respectively. Data from Game 1  $\rightarrow$  6, each game with 2400 observations, 12 repeated 200 rounds' sessions for each Game 1  $\rightarrow$  6 games, data from [Selten & Chmura \(2008\)](#)

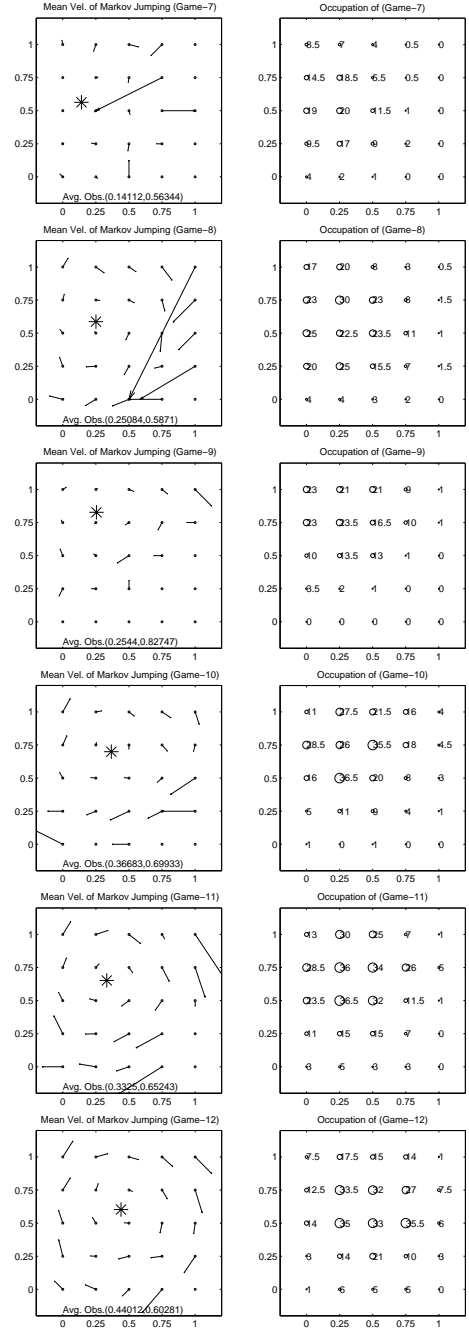


Figure 4: Velocity pattern in  $5 \times 5$  lattices for Game 7-12 respectively. Data from Game 1-6, each game with 2400 observations (12 repeated 200 rounds' sessions for each Game 7-12 games, data from [Selten & Chmura \(2008\)](#)

### 态之间过程的不对称

按照统计物理的态的概念，我们可以用不直观

的，但是较为严格的方法来表示这种对称的破缺。通过统计二态间跃迁，也就是发射和吸收的在各个测量的实验节(session)中的差值，获得12个





样本，检验该12个样本在统计检验上，这种对称性破缺的可靠性的程度。把偏离细致均衡条件的结果，按照偏离的可靠性程度，在图上表示出来，得到图7。图Figure 7是我们实验(0)的结果，对比的对象是Selten和Chmura实验Selten & Chmura (2008)的Game (3)和Game(6)。

与Figure 7中Game 0 的结果对比，有相同观察次数的随机数的结果”Game13”，Figure 8，其中在625对过程中，没有发现满足 $p < 0.01$ 的不对称过程，也就是说 $p < 0.01$ 的不对称过程的观察次数为0。在我们的实验Game0中， $p < 0.01$ 的不对称过程的观察到的次数大于10次。

### 价格波动的内在结构

为说明我们速度场方法的优势以及速度场的经济学含义，我们从文献Cason et al. (2005) 开始。数据来源直接是T.N.Cason et.al., Journal of Economic Dynamics and Control 29 (2005), Page 815. 其中表一二给出了8个马尔可夫矩阵(Markov transition matrix)。Table4 是去除时间反演对称过程，也就是去除细致均衡过程的结果。按照主文中的测量，我们得到Q1, Q2, Q3和Q4各态上的速度的大小和方向，同时也可以得到分布。Figure 5是计算结果，这是一个一维的例子。图中在Q2和Q3上的速度方向表示在中间价格段。该图结果说明，价格是持续地下降然后突然上升的过程。这个问题的背景是，假设Q1, Q2, Q3和Q4是在均衡点附近，那么，价格的长期变动是(1)无规则，(2)按照 $Q1 \rightarrow Q2 \rightarrow Q3 \rightarrow Q4 \rightarrow Q1 \rightarrow Q2 \dots$ 是持续上升然后突然下降的循环波动；或(3)按照 $Q1 \leftarrow Q2 \leftarrow Q3 \leftarrow Q4 \leftarrow Q1 \leftarrow Q2 \dots$ 是持续下降然后突然上升的循环波动；按照得到主文图Figure1的方法，得到的结论是(3)。

直接观察表Table 4, 可以通过矩阵元的正负数值，判断出这是持续下降和突然上升的市场结构，得到的结论也是(3)。没有一个矩阵元是例外，更没有一个表例外。结果是如此的明显，以至不需要任何的统计检验。

作为另外一个一维实验数据支持的例子，来自Buchheit & Feltovich (2010)。这里把价格分成了8段，同样用我们的方法，可以得到的时间反演反对称Markov过程的表示，见表6。在这个实验中，得到的结论也是(3),也就是说，价格是按照 $Q1 \leftarrow Q2 \leftarrow Q3 \leftarrow Q4 \leftarrow Q1 \leftarrow Q2 \dots$ 演化的。

Maskin等人在1988年的对EdgeWorth圈的分析Maskin & Tirlé (1988)，通过假想的响应函数，构建了价格波动的理论框架和图象。那里用的方法已经在石油市场的数据中得到支持Noel (2007)。在

应用Maskin理论的时候，Markov均衡的理论也得到应用。实验上，在1994年的Smith实验Kruse et al. (1994)和2003年的Cason实验也对价格波动的问题进行了研究。根据文献Benaïm et al. (2009)的总结，Cason等人在文献Cason et al. (2005)中的方法是以几个测量方法中最理想的。但是，他们方法中不能得到直观的几何图象，而我们的方法可以直接在反对称矩阵上的分析获得他们的结论并获得几何图象。

不同的市场有不同波动结构的可能性。具体的说，比如，Zhang (2005)在Yahoo@在线市场拍卖的实验中，就发现了同样的持续价格持续循环的过程，但是，价格是持续地上升，然后突然地下降，然后再持续地上升。他们得到的结果是每个周期大约是23轮，其中21.74轮是持续上升的过程而1.27轮是下降的过程，每次的上升过程是1美分1美分地，而下每次降过程是大于20美分的。在符合各态历经的Markov过程(ergodic Markov chain)下，通过概率的平衡和特征值的估算，可以得到循环的周期。我们的方法可以单纯地从观察值出发，直接得到过程的评估。比如在表4上，我们可以容易地得到关于周期和分布的特性。在二维的周期问题上，通过我们的速度场的方法，可以通过轨道分布估算其周期。同样估算出，甚至是过滤去除长期趋势引起的时间反演不对称的在整个过程中的权重。我们的马尔可夫时间反演的方法，可能给出了一种新的发现和描述动态结果的方法。

### 收敛的结果的验证

为说明时间反演方法的有效性，这里给出一个收敛的例子。文献Battaglini & Palfrey (2007)给出的是一个有关不同分配制度的投票实验的结果。通过马尔可夫过程的时间反演的转换，可以得到5.该表是时间反演反对称过程的结果。在(CW)子表中，第二态(15-30-15)和第三态(15-15-30)是净吸收态，而第四态(20-20-20)是净发射态。在(NCW)子表中，第二态(30-0-30)是净发射态，而第四态(20-20-20)是净吸收态。对比时间反演反对称过程，这二种制度的差别对比是显而易见的。表中的各态的三个数字表示三者的分配方案。

有趣的是，文献Battaglini & Palfrey (2007)完全在Markov过程下进行分析的。

### 5.4. Appendix D

#### 附录四：实验数据和数据结构说明

#### 实验数据

明细数据可以在论文发表的杂志网站上下载。地址是<http://www.www.www>

Table 4: Unbalanced Markov Jumping in [Cason et al. \(2005\)](#) table 1-2, Page 815

(1.1)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$	(1.2)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$
$Q_1^t$	0	-8	2	4	$Q_1^t$	0	-6	-5	7
$Q_2^t$	8	0	-7	-5	$Q_2^t$	6	0	-4	-2
$Q_3^t$	-2	7	0	-4	$Q_3^t$	5	4	0	-10
$Q_4^t$	-4	5	4	0	$Q_4^t$	-7	2	10	0
(1.3)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$	(1.4)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$
$Q_1^t$	0	-5	2	-2	$Q_1^t$	0	-5	5	-1
$Q_2^t$	5	0	-7	1	$Q_2^t$	5	0	-13	2
$Q_3^t$	-2	7	0	-4	$Q_3^t$	-5	13	0	-6
$Q_4^t$	2	-1	4	0	$Q_4^t$	1	-2	6	0
(2.1)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$	(2.2)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$
$Q_1^t$	0	-10	5	5	$Q_1^t$	0	-4	0	4
$Q_2^t$	10	0	-7	-7	$Q_2^t$	4	0	-6	1
$Q_3^t$	-5	7	0	-3	$Q_3^t$	0	6	0	-6
$Q_4^t$	-5	7	3	0	$Q_4^t$	-4	-1	6	0
(2.3)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$	(2.4)	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$
$Q_1^t$	0	-5	-2	6	$Q_1^t$	0	-6	-2	4
$Q_2^t$	5	0	-6	-1	$Q_2^t$	6	0	-4	-1
$Q_3^t$	2	6	0	-9	$Q_3^t$	2	4	0	-5
$Q_4^t$	-6	1	9	0	$Q_4^t$	-4	1	5	0

说明：见对角矩阵元下一矩阵元的数值，大于0表示价格下降，小于0为上升。上面8表的全部事例均表现出价格连续下降的过程。

Table 5: Unbalanced Markov Jumping in the CW and NCW games [Battaglini & Palfrey \(2007\)](#)

CW	$30 - 15 - 15^{t+1}$	$15 - 30 - 15^{t+1}$	$15 - 15 - 30^{t+1}$	$20 - 20 - 20^{t+1}$
$30 - 15 - 15^t$	0	4	2	-11
$15 - 30 - 15^t$	-4	0	0	-8
$15 - 15 - 30^t$	-2	0	0	-5
$20 - 20 - 20^t$	11	8	5	0
NCW	$30 - 30 - 0^{t+1}$	$30 - 0 - 30^{t+1}$	$0 - 30 - 30^{t+1}$	$20 - 20 - 20^{t+1}$
$30 - 30 - 0^t$	0	-4	2	5
$30 - 0 - 30^t$	4	0	2	4
$0 - 30 - 30^t$	-2	-2	0	4
$20 - 20 - 20^t$	-5	-4	-4	0

说明：该表的二个例子，都呈现为收敛态。上表收敛到中间二态，下表收敛到第四态20 - 20 - 20。

Table 6: Time Anti-Symmetry Markov Jumping in Buchheit &amp; Feltovich (2010)

	$Q_1^{t+1}$	$Q_2^{t+1}$	$Q_3^{t+1}$	$Q_4^{t+1}$	$Q_5^{t+1}$	$Q_6^{t+1}$	$Q_7^{t+1}$	$Q_8^{t+1}$
$Q_1^t$	0	-7	3	8	-5	2	0	4
$Q_2^t$	7	0	-32	-13	4	8	-2	1
$Q_3^t$	-3	32	0	-20	-8	-10	-5	2
$Q_4^t$	-8	13	20	0	-36	-19	-7	-8
$Q_5^t$	5	-4	8	36	0	-29	-2	-8
$Q_6^t$	-2	-8	10	19	29	0	-26	-7
$Q_7^t$	0	2	5	7	2	26	0	-17
$Q_8^t$	-4	-1	-2	8	8	7	17	0

说明：见对角矩阵元下一矩阵元的数值，大于0表示价格下降，小于0为上升。上表的全部事例均表现出价格连续下降的过程。Data from Buchheit & Feltovich (2010), Experimental evidence of a sunk-cost paradox: a study of pricing behavior in Bertrand-Edgeworth duopoly

每人每轮1条记录，每实验节有8人，300轮，共12节(Session),28800条记录。  
实验系统运行正常，12节实验进行过程中均无系统中断，数据记录完整，无人报告实验系统提供记录与个人记录有出入。  
作为对比，由计算机按照相同概率的生成的模拟决策数据，即“Game13”的记录(由此我们得到图9)也可以从这里得到。

### 实验数据结构

**ExperimentID** 是实验编码，字符型，共8位。其中前五位表示日期，第6位表示地点，第7-8位表示顺序。共有12个节session。

**PeriodID** 是轮次编码，整数型，表示轮次，数值是1-300。

**SubjectID** 是个人编码，字符型，共有8个数值，T001-T008。

**GroupID** 是组号，整数型，数值是1-4，共有4个组，相同的组号配成一对。

**MyNo** 是角色编码，整数型，数值是1-2，1是Up-Down角色，2是Right-Left角色。

**c1**是被试的选择，整数型，数值是0-1；对Up-Down角色而言，1代表选Up，0代表选Down；对Right-Left角色而言，1代表选Left，0代表选Right。

**inputtime**是选择时间，时间型；YYYY-MM-DD-HH:MM:SS中，YYYY是年份，MM是月份，DD是日期，HH是24小时计数为单位的，MM是分钟，而SS是秒。记录着计算机实验系统收到该决策的时间，本实验记录的基本单位是秒。

附件中提供的“Game13”的数据，没有inputtime这一项，因为这是计算机随机生成的c1结果，随机数

由Excel2003的Random函数产生。

### References

- Baiesi, M., Maes, C., & Wynants, B. (2009). Fluctuations and response of nonequilibrium states. *Physical review letters*, 103, 10602.
- Battaglini, M., & Palfrey, T. (2007). The dynamics of distributive politics. *Northwestern University, CMS-EMS Discussion Paper*, 1451.
- Benaïm, M., Hofbauer, J., & Hopkins, E. (2009). Learning in games with unstable equilibria. *Journal of Economic Theory*, 144, 1694–1709.
- Bertini, L., De Sole, A., Gabrielli, D., Jona-Lasinio, G., & Landim, C. (2001). Fluctuations in stationary nonequilibrium states of irreversible processes. *Physical Review Letters*, 87, 40601.
- Bouchez, N., & Friedman, D. (2008). Equilibrium convergence in normal form games. *Handbook of Experimental Economics Results*, 1, 472–480.
- Buchheit, S., & Feltovich, N. (2010). Experimental evidence of a sunk-cost paradox: a study of pricing behavior in bertrand-edgeworth duopoly. *forthcoming, International Economic Review*.
- Cason, T., Friedman, D., & Wagener, F. (2005). The dynamics of price dispersion, or Edgeworth variations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29, 801–822.
- Edgeworth, F. (1925). The pure theory of monopoly. *papers relating to Political Economy*, 1, 111–142.
- Gaunersdorfer, A., & Hofbauer, J. (1995). Fictitious play, shapley polygons, and the replicator equation. *Games and Economic Behavior*, 11, 279–303.
- Hofbauer, J. (1996). Evolutionary dynamics for bimatrix games: A hamiltonian system? *Journal of mathematical biology*, 34, 675–688.
- Hofbauer, J., & Sandholm, W. (2009). Stable games and their dynamics. *Journal of Economic Theory*, 144, 1665–1693.
- Hofbauer, J., & Sigmund, K. (2003). Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40, 479.
- Kruse, J., Rassenti, S., Reynolds, S., & Smith, V. (1994). Bertrand-edgeworth competition in experimental markets. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, (pp. 343–371).

- Maskin, E., & Tirolé, J. (1988). A theory of dynamic oligopoly, ii: Price competition, kinked demand curves, and edgeworth cycles. *Econometrica*, 56, 571–599.
- Noel, M. (2007). Edgeworth price cycles, cost-based pricing, and sticky pricing in retail gasoline markets. *The Review of Economics and Statistics*, 89, 324–334.
- Onsager, L., & Machlup, S. (1953). Fluctuations and irreversible processes. *Physical Review*, 91, 1505–1512.
- Prigogine, I. (1978). Time, structure and fluctuations. *Science*, 201, 777–785.
- Sato, Y., Akiyama, E., & Farmer, J. (2002). Chaos in learning a simple two-person game. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 99, 4748.
- Schuster, P., & Sigmund, K. (1981). Coyness, philandering and stable strategies. *Animal Behaviour*, 29, 186–192.
- Selten, R., & Chmura, T. (2008). Stationary concepts for experimental 2x2-games. *The American Economic Review*, 98, 938–966.
- Shapley, L. (1964). Some topics in two-person games. *Advances in game theory*, 52, 1 – 29.
- Van Huyck, J. (2008). Emergent conventions in evolutionary games1. *Handbook of Experimental Economics Results*, 1, 520–530.
- Xu, B., & Wang, Z. (2010). Social Spiral Pattern in Experimental 2x2 Games. *SSRN eLibrary*, .
- Young, H. (2008). Stochastic Adaptive Dynamics. *New Palgrave Dictionary of Economics*, revised edition, L. Blume and S. Durlauf, eds. Zanella, G.(2007), “Discrete Choice with Social Interactions and Endogenous Membership,” *Journal of the European Economic Association*, 5, 122–153.
- Zhang, X. (2005). Finding edgeworth cycles in online advertising auctions. *Unpublished Paper*, .

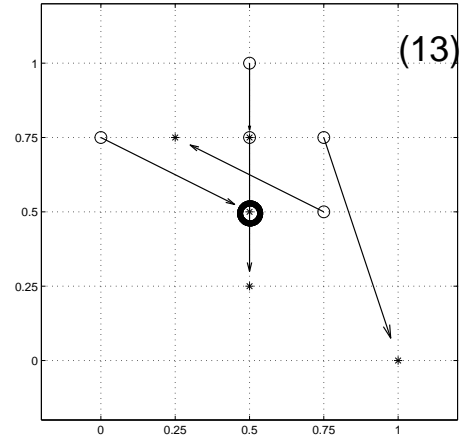


Figure 8: Counter-clock's pattern of T-antisymmetry absorb and emission processes within states in  $5 \times 5$  lattices for Game 13 for comparing with Figure  $p < 0.01$  presented in heavy dark and  $0.01 < p < 0.05$  in light. Heavy cycles are the mean values of the occupation in strategy space from 3600 observations in "Game 13".

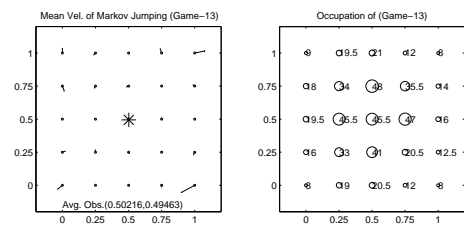


Figure 9: Velocity pattern in  $5 \times 5$  lattices for Game 13. Data from random seed produced by computer. For both "Up-Down" and "Left-Right" two population, the possibility of each 'subject' to choose the '0' or '1' are equal. Total with 3600 observations (12 repeated 300 rounds' sessions at this 'experiment', named as 'Game 13' here.)